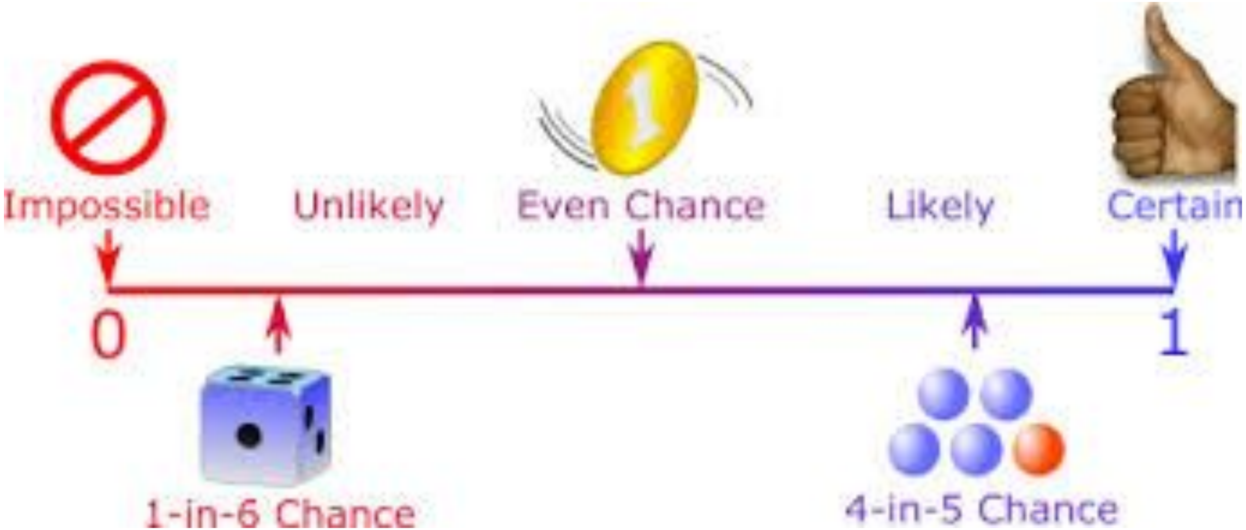
Lautapelien matematiikkaa

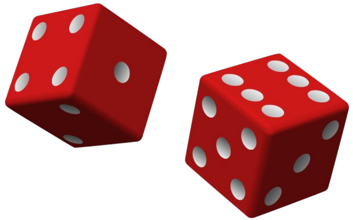
Satunnaisuus, kombinatoriikka, odotusarvo ja sananen pelien optimoimisesta



Moni lautapelisuunnittelija on matematiikko

- PhD Richard Garfield (Magic The Gathering, The Great Dalmuti, jne.)
- PhD Reiner Knizia (Samurai, Euphrat und Tigris, jne.)
- Uwe Rosenberg (Bohnanza, Agricola, jne.)

Pelit sisältävät matematiikkaa



- Aina jos on käytössä noppia tai kortteja, mukana on satunnaisuutta (halusi sitä tai ei).
- Huonosti suunnitellussa pelissä pelin tekijä ei ole ymmärtänyt satunnaisuuden perusluonnetta ks. sudenkuopat.
- Esim. shakissa ei ole satunnaisuutta, mutta siinä on kombinatoriikkaa: pelissä on äärellinen määrä mahdollisia siirtoja.
- Jos pelissä on rahaa tai resursseja, toiminnoilla on jokin odotusarvo.

Satunnaisuuden sudenkuopat - OP

- Pelissä on mahdollista pelkän sattuman avulla saada merkittävä etu. Esim. pakassa on yksi kortti, jonka nostaminen aloituskäteen tarkoittaa lähes aina pelin voittamista. Tällöin peli redusoituu Kimbleksi tai kolikon heitoksi!
- Tähän syyllistyvät kaikki (isotkin) suunnittelijat.
- Ratkaisuna on nerffaus, joka tarkoittaa epäonnistumista.

Satunnaisuuden sudenkuopat - Fillers

- Satunnaisesti on mahdollista tulla sellaisia tapahtumia, joilla ei ole merkitystä. Esim. korttipeleissä saat kortin, jolla tuhotaan tietyntyyppinen kortti, mutta vastustajalla ei ole ko. kortteja pakassaan.
- Tyypillinen ratkaisu on mekaniikka, jolla kortteja saa kierrätettyä (cycling).

Satunnaisuuden sudenkuopat - Alike

- Matemaattisesti pelien statistiikan avulla olisi mahdollista nerffata kortteja ohjelmallisesti “lennossa”, ts. jos joku kortti on liian voimakas, nostetaan sen casting costia tai pudotetaan healthia tai poweria. Tällainen matemaattiinen iteraatio tekee sen, että loppujen lopuksi kaikki kortit ovat “yhtä voimakkaita”, jolloin pelistä häviää jotain olennaista.
- Satunnaisten ominaisuuksien voimakkuuksissa saa ja pitää olla eroja, mutta hyvässä pelissä ne eivät ole liian suuria.

Satunnaisuuden sudenkuopat - Combot

- Hyvissä peleissä on useita ominaisuuksia, jotka yhdessä muuttuvat voimakkaammiksi.
- Hyvässä pelissä combot on tarkkaan rakennettu.
- Huonossa pelissä eri vaihtoehtoja ei ole mietitty tarkkaan ja peliä ei ole testattu tarpeeksi, jolloin syntyy comboja, jotka voivat rikkoa koko pelin!

Pohdintaa: Master of Orion & 7 Wonders

MOO on loistava esimerkki siitä miten turhista teknologioista saadaan hyödyllisiä.

Vastaavalla tavalla 7 Wondersissa kortteja voi vaihtaa rahaksi, jolloin tyhjiä vuoroja ei synny.

Klassinen todennäköisyys

P(A)=”suotuisat tapahtumat” / “kaikki tapahtumat

Esim. Norminopalle P(6)=⅙=0,1666…, noin 17 %.

Esim. Norminopalle P(parillinen)=3/6=0,5=50 %.

Esim. Normikorttipakalle P(ässä)=4/52=0,0769…, noin 8 %.

Esim. Normikorttipakalle P(punainen, kuvakortti)=8/52=0,1538…, noin 15 %

Peräkkäiset nopanheitot (kertolaskusääntö)

Nopalla ei ole muistia!

Kahdella nopalla vaihtoehtoja on $6 \cdot 6 = 36$, kolmella jo $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$!

P(kaksi heittoa ja “snake eyes”)$=1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ n. 2,8 %

P(kaksi heittoa, molemmat yli 3)$=3/6 \cdot 3/6 = 25$ %.

Komplementti

Monesti todennäköisyydet kannattaa laskea vastatapahtuman, eli komplementin avulla.

P(kaksi heittoa, toinen tai molemmat kutosia)=1-P(ei yhtään kutosta)=1-5/6·5/6=1-25/36, noin 31 %.

Noppalukujen summa

Kahdella norminopalla saadaan seuraavanlainen "matriisi":

P(n+m=7)=6/36=1/6=, noin 17 %.

P(n+m=6)=P(n+m=8)=5/36, noin 14 % jne.

Huom. 7 on siis todennäköisin tulos.

Jos noppaa heitetään miljoona kertaa ja silmäluvut summataan, mikä on todennäköisin tulos?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Noppalukujen summa - käytännön pelisuunnittelussa

Jos pelissä on paljon noppien summaamista, käytännöllistä on ajatella kuusitahkoisen nopan odotusarvoksi 3,5.

Entä jos käytössä on kahdeksantahkoinen noppa?

Kaksitoistatahkoinen?

20-tahkoinen?

Ehdollinen todennäköisyys (tn.avaruus muuttuu)

Esim. Korttipakasta vedetään kaksi korttia. Mikä on todennäköisyys, että toinen on ässä, kun ensimmäinen oli jo ässä?

Alussa kortteja on 52 kpl, joista ässiä on 4 kpl. 1. kortinvedon jälkeen 51 kpl, joista 3 on ässiä. (ts. todennäköisyysavaruus muuttuu).

P(molemmat ässiä)=$4/52 \cdot 3/51$, noin 0,45 %.

Kun tapahtumia on monta, laskut muuttuvat pitkiksi ja hankaliksi! Tämän vuoksi kaikkea ei pysty mallintamaan (esim. koodata ja sitä kautta tehdä paljon toistoja), vaan tode

Todennäköisyyksien vaikutus pelisuunnitteluun

- Kun tapahtumia on monta, laskut muuttuvat pitkiksi ja hankaliksi!
- Kaikkea ei pysty mallintamaan helposti (esim. koodata ja sitä kautta tehdä paljon toistoja).
- Todennäköisyyslaskennan osaaminen antaa suuntaviivat.
- Pelitestaus antaa lopullisen tuloksen.
- Jos pelissä on liikaa todennäköisyyttä, se on Kimble! Olisiko muita mekaniikkoja käytössä?

Odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

Odotusarvo on tärkeä työkalu kun arvioidaan riskiä. Yllä on norminopan odotusarvo. Se on siis tapahtumien “arvojen” ja todennäköisyyksien tulojen summa.

Monissa peleissä osa tapahtumien arvoista ovat kuitenkin negatiivisia, jolloin oleellista on vähintäänkin arvioida onko odotusarvo negatiivinen vai positiivinen. Esimerkiksi RAY:n yms. kolikkopelien odotusarvo on ymmärrettävistä syistä negatiivinen, eli jos koneeseen laitetaan miljoona euroa, palautus on miljoonaa jonkin verran pienempi (vaikkapa -5 %).

Kolikonheittopelin odotusarvo

Esim. Lähdet kolikonheittopeliin (tupla tai kuitti), jossa osallistumismaksu on 20 €. Voittaessasi saat 40 €, jolloin jäisit plussalle 20 € (40 € - 20 €). Nyt odotusarvo on $E(X)=-20\cdot\frac{1}{2}+20\cdot\frac{1}{2}=0$! Tämä on tyypillinen esimerkki nollasummapelistä, jossa odotusarvo on nolla. Tämä on kiusallinen tilanne lautapeleissä, sillä usein tässä vaihtoehdossa menettää pelivuoronsa.

Odotusarvoesimerkki lautapelissä

Eräässä lautapelissä sinulla on kaksi vaihtoehtoa vuorollasi: **1)** ota pankista 100 krediittiä tai **2)** heitä noppaa ja luvuilla 1 sekä 2 menetät 200 krediittiä, 3-5 et menetä mitään tai luvulla 6 saat määrän x krediittejä. Kuinka paljon x:n pitäisi olla, että heitto olisi keskimäärin kannattava? Odotusarvon pitäisi siis olla positiivinen ja itse asiassa enemmän kuin 100 krediittiä (tapaus 1) on varma: $100 < -200 \cdot 2/6 + 0 \cdot 3/6 + x \cdot 1/6$, jolloin $x > 1000$, eli x:n pitäisi olla suurempi kuin 1000, jotta riski olisi kannattava. Todellisuudessa tilanne on hyvässä lautapelissä huomattavasti haastavampi. Monesti on tärkeää yrittää ennustaa peliä vuoro tai parikin eteenpäin. Jos huomaat, että jos ottaisit 100 krediittiä, päätyisit seuraavalla tai jopa sitä seuraavilla vuoroilla ottamaan vain tuon “perussumman” (tyhjä vuoro), voi olla, että riski on järkevä ottaa.

Kuka on johdossa?

Esim. Pöydässä on kaksi pistekorttia, jotka antavat sinulle pelin lopussa pisteitä: A=1000 p ja B=750 p. Vastaavat kortit antavat kuitenkin kilpakumppanillesi seuraavalla vuorolla pisteitä: A=200 p ja B=500 p. Nyt pitää laskea erotukset. Vaihtoehdolle, jossa sinä otat kortin A ja vastustaja B:n, erotus on 1000 p - 500 p =500 p. Toisessa vaihtoehdossa sinä otat B:n ja vastustaja A:n, jolloin erotus on 750 p - 200 p =550 p. Jälkimmäinen vaihtoehto on siis parempi, vaikka nopeasti katsottuna A vaikuttaisikin houkuttelevammalta.

Alku-, keski- ja loppupeli?

Pelit jakautuvat tyypillisesti kolmeen osaan: alku-, keski- ja loppupeliin. Yleensä (resurssi)lautapelissä on nämä kaikki, jolloin hyvä lautapelaaja osaa tunnistaa missä kohtaa peli on kulloinkin menossa.

Kärjistetysti alkupelissä hankitaan “tehtaita” tjms. resursseja kasvattavaa potentiaalia. Alkupelissä ei yleensä olla vielä kiinnostuneita pisteistä.

Keskipelissä tasapainoillaan pisteiden ja resurssien kanssa sekä tarpeen mukaan edistetään tai toppuutellaan pelin siirtymistä loppupeliin.

Loppupelissä kahmitaan kaikki irtopisteet.

Vaihtoehtoiskustannus (opportunity cost)

“Jos valitsen tämän, niin mitä hyötyä saan, mutta mitä jää samalla saamatta?”

Esim. Stone Age -pelissä asetataan työntekijöitä laudalle. Vaihtoehtoja ovat: lisääntyminen (2 nappulaa), pelto (1 ilmainen ruoka vuorossa), paja (1 työkalu) tai eri resurssien hankkiminen. Pohdin valintaa lisääntymisen ja pellon välillä. Jos valitsen lisääntymisen, niin valinnan “vaihtoehtoiskustannus” on yksi ruoka tällä ja tulevilla vuoroilla sekä yksi työntekijä tällä vuorolla.

Vaihtoehtoiskustannus on siis se vaihtoehto, joka jäi toiseksi eri vaihtoehtoja pohtiessa.

Vaihtoehtoiskustannukset ovat oiva tapa lisätä peliin “matemattiista” ulottuvuutta.

Futuuri

On esimerkiksi kortti, joka antaa paljon pisteitä pelin lopussa, jos tietyt ehdot täyttyvät. Tyypillisesti nämä kortit/tavoitteet hankaloittavat alku- ja keskipeliä. Pakanrakennuspeleissä ne ovat tiellä ja muutoinkin niiden hamstraaminen vie toimintoja.

Futuurit ovat hyvä tapa tehdä pistepeleihin tavoitteita.

Esim. Ticket to Ride:n pitkät junapätkät

Taistelut roolipeleissä

Taistelumekaniikkoja on lukuisia, osa parempia, suurinosa huonompia.

- Miten tehdä nopea, mutta hyvin mallintava taistelumekaniikka?
- Kriittiset iskut: Voiko pesantti tappaa lohikäärmeen mädällä omenalla? Jos on noppamekaniikka, mikä on skaalaus?
- Armor Class ja Attack value -ongelmat: Jos AC nousee liian korkeaksi, nopasta voi loppua numerot osumiseen! Jos Attack on liian suuri, kaikki lyönnit osuvat.
- Taisteluiden pitäisi olla haastavia, mutta “lopullista” hahmon kuolemaa pitäisi välttää. Huom. jos teet fantasiapeliä, voit määritellä hahmon kuoleman ihan miten haluat (kloonit, korvaava sotilas, respawn, jne.). Älä jämähdä D&D:hen.

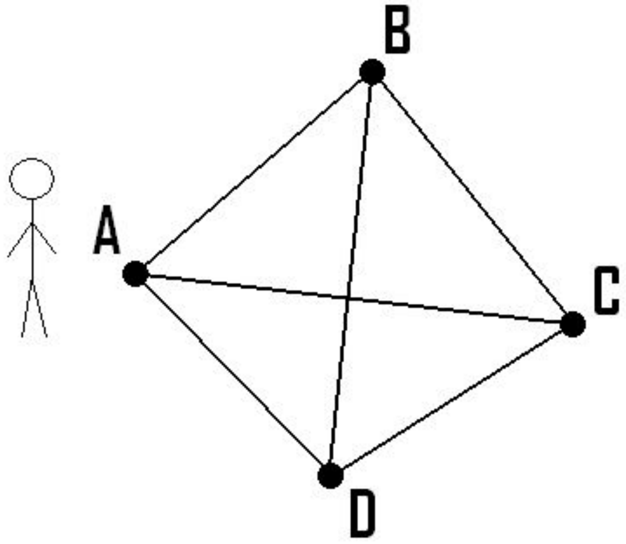
Logiikka

- Logiikka on matematiikan osa-alue ja se on lautapelisuunnittelussa jopa todennäköisyyslaskentaa merkittävämpi.
- Myös abstrakteissa peleissä on jokin logiikka.
- Jos peli ja varsinkin säännöt eivät ole loogisia, siitä seuraa helposti se, että säännöt ovat monitulkintaisia, jolloin peli on huonosti suunniteltu!

Kauppamatkustajan ongelma

“Jos kauppamatkustaja tietää kaupunkien keskinäiset etäisyydet, miten hän voi laskea itselleen nopeimman (lyhimmän, halvimman) kulkureitin, jossa palataan lopussa lähtökaupunkiin ja käydään kaikkien muiden kaupunkien kautta tasan kerran?”

Jos reittejä on paljon, kombinaatioita tulee valtavasti! Pelisuunnittelussa pitää varoa, että yksi reitti ei ole paras, koska silloin kaikki muut jäävät käyttämättä. Ratkaisu voi olla vaihtoehtoiskustannus.



Kauppamatkustajan ongelman esimerkki

Puutarhaan on istutettu 16 kasvia säännölliseen ruudukkoon, ja puutarhurin on käytävä kunkin kasvin luona ja poistuttava tulopaikan kautta. Tässä tapauksessa on selvää, että optimaalinen ratkaisu on se, jossa kukin siirtymä on yhtä suuri kuin kahden vierekkäisen kasvin väli (tässä merkitty luvulla 1). Alla olevissa kuvissa viimeinen siirtymä on jätetty piirtämättä.

Eräs optimaalinen ratkaisu on:

```
o->o--o--o
         |
o  o--o--o
|  |                kuljettu matka = 15 + 1
o  o--o--o
|        |
o--o--o--o
```

Eräs huonompi ratkaisu on:

```
o->o--o--o
         |
o--o--o--o
|                   kuljettu matka = 15 + 3
o--o--o--o
         |
o--o--o--o
```

Lautapelien simulointiongelmat

- Kahden tapahtuman vertaaminen on verrattain helppoa testaamalla tilannetta irtaallaan pelistä. Ks. edelliset esimerkit.
- Koko pelin simulointi on usein mahdotonta, sillä ongelmaksi tulee odotusarvojen epämääräisyys.
    - Mikä on kortinnoston, resurssien jne. arvo?
    - Mikä on futuurin onnistumisen todennäköisyys?
    - Miten simuloida vaihtoehtoiskustannuksia?
- Älä testaa sokkona (ilman ymmärrystä matematiikasta) ja tee muutoksia mututuntumalla! Tee tilastoja testauspeleistä ja analysoi pitäisikö jotain ominaisuutta parantaa/heikentää/poistaa.
- Simuloinnissa voit kokeilla mitä tapahtuu, jos toinen saa unelmakortit ja toinen huonoimmat mahdolliset. Syntyykö silti haastava ja kiva pelikokemus.

Kotitehtävä

Pelaa peli Power Gridiä!

Siinä on nerokas tasoitusmekaniikka, ts. se jolla menee huonoiten, ostaa ensimmäisenä resurssit (halvalla) ja se, jolla menee parhaiten viimeisenä (kalliilla).

Lopullinen kuolema/konkurssi on masentavaa, samoin se, että jo alkupelissä tiedät häviäväsi pelin.

“if you can compute the numbers that you are balancing in game design, the design is probably too simple and solvable.”